

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DOS INSTITUTOS FEDERAIS

OMIF 2020 Prova de Primeira Fase

Dados do estudante:

Nome:	
E-mail:	
Nome de um Responsável Legal:	
Telefone:	CPF:
Data de Nascimento:	Gênero:
Instituição e Campus:	
Curso Técnico:	Série:

Termos de Compromisso:

- Estou ciente que esta prova deve ser resolvida em algum horário entre 14h e 20h (horário de Brasília) do dia 25/10/2020.
- Estou ciente que é terminantemente proibida, durante a realização da prova, qualquer comunicação com outras pessoas. Caso isso seja constatado, minha prova será anulada.
- Estou ciente que é terminantemente proibida a publicação das questões dessa prova no dia 25/10 em qualquer mídia digital. Caso isso seja constatado, minha prova será anulada.
- Estou ciente que, durante a realização da prova, é permitido o uso de livros e da internet para acesso a sites de pesquisa, mas é terminantemente proibido o uso da internet para acessar sites de fórum de discussão, sites de comunicação e afins. Caso isso seja constatado, minha prova será anulada.

Declaro que li e estou de acordo com os termos: _____

Assinatura do estudante



NÍVEL 1
(3 pontos para cada acerto)

QUESTÃO 01

Esta prova é composta por 15 questões, distribuídas igualmente em 3 níveis, que pontuam o competidor segundo as seguintes regras:

- Cada acerto em uma das 5 questões do nível 1 vale 3 pontos;
- Cada acerto em uma das 5 questões do nível 2 vale 4 pontos;
- Cada acerto em uma das 5 questões do nível 3 vale 5 pontos;
- Cada erro em qualquer das 15 questões da prova vale 0 ponto, ou seja, o competidor não ganha e nem perde ponto com erros.

Deste modo, a nota final de cada competidor desta olimpíada é um número inteiro de 0 a 60. Contudo, seguindo esta regra, há exatamente 4 números inteiros neste intervalo que não podem ser a nota final de competidor algum. A soma destes números é:

- A) 117
- B) 118
- C) 119
- D) 120**
- E) 121

QUESTÃO 02

O operador matemático \oplus é tal que, aplicado a qualquer número natural par, retorna a sua metade e, aplicado a qualquer número natural ímpar, retorna o seu triplo adicionado de uma unidade. Por exemplo, $\oplus(14) = 7$ e $\oplus(15) = 46$.

Se aplicarmos este operador ao número 20 e, ao seu resultado, aplicarmos este operador novamente, e assim sucessivamente, até concluir 2020 aplicações do operador, que número obteremos?

- A) 10
- B) 5
- C) 4
- D) 2
- E) 1**

QUESTÃO 03

A expressão numérica abaixo se refere a várias adições. Os números 0, 1, 2, 3, 4 e 5 são somados diversas vezes, nesta ordem, até que se obtenha, como resultado, o número 2020. Note que, para isso, foi necessário parar a expressão no 4.

$$0+1+2+3+4+5+0+1+2+3+4+5+... \\ ...+0+1+2+3+4+5+0+1+2+3+4=2020$$

A quantidade de sinais de adição (+) que foram utilizados na expressão numérica acima é

- A) 805
- B) 806
- C) 807
- D) 808**
- E) 809

QUESTÃO 04

Recentemente, um garoto nigeriano de 12 anos, Chika Ofili, descobriu um critério matemático de divisibilidade por 7. Ele percebeu que, para saber se um número é divisível por 7, basta multiplicar o último algarismo deste número por 5 e somar ao número que sobra ao se retirar este último dígito. Se esse resultado for divisível por 7, então o número inicial é divisível por 7 também. Se o resultado encontrado for um número “grande”, pode-se repetir o processo até que se consiga fazer esta verificação com mais facilidade.

Por exemplo, o número 658 é divisível por 7 se $5 \times 8 + 65 = 105$ também for. Repetindo o processo, 105 é divisível por 7 se $5 \times 5 + 10 = 35$ também for. Como 35 é divisível por 7, então, o número 658 é divisível por 7 também.

Considere o menor número de seis algarismos distintos do tipo AB3456 que é divisível por 7. Neste caso, o valor de A+B é:

- A) 2
- B) 6
- C) 9**
- D) 13
- E) 14



QUESTÃO 05

O coordenador da Comissão de Elaboração de Provas da OMIF deseja criar uma senha para acessar a pasta que contém as questões que serão selecionadas para compor a prova da primeira fase. O coordenador definiu que a senha será composta pelos caracteres de OMIF2020, não necessariamente nesta ordem, de modo que os zeros não estejam juntos, ressaltando que a letra O é diferente do número 0 (zero). Quantas são as senhas com essa configuração?

- A) 7580
- B) 7560**
- C) 7540
- D) 7520
- E) 7500

NÍVEL 2

(4 pontos para cada acerto)

QUESTÃO 06

Em uma sala do *campus* Betim, do Instituto Federal, estão alocados exatamente 50 alunos para resolver a prova da primeira fase da OMIF 2020. A faixa etária desses alunos varia de 14 a 20 anos. Apenas com estas informações hipotéticas, pode-se afirmar, com certeza, que, nessa sala:

- A) não existe aluno que faça aniversário em dezembro.
- B) sete alunos têm 14 anos.
- C) pelo menos um aluno tem 18 anos.
- D) pelo menos seis alunos fazem aniversário no mesmo mês.
- E) pelo menos oito alunos têm a mesma idade.**

QUESTÃO 07

Para comemorar seu aniversário, Gabriela convidou 32 pessoas para uma festinha em sua casa e resolveu preparar alguns brigadeiros para servi-las. Contudo, com tantas tarefas na arrumação da festa, ela se enganou na cozinha e preparou apenas uma receita, que é o suficiente para preparar somente 54 brigadeiros do tamanho normal, que ela está acostumada a fazer. Por isso ela pretende enrolar os brigadeiros num tamanho menor do que o normal, para conseguir fazer exatamente 4 para cada convidado (ela não vai comer). Considerando que os brigadeiros tenham forma esférica e sabendo que o volume de uma esfera de raio R pode ser calculado pela relação

$$V_{esf} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3,$$

em que porcentagem Gabriela deve reduzir o raio do brigadeiro normal, para que consiga esse feito?

- A) 25%**
- B) 42%
- C) 50%
- D) 58%
- E) 75%



QUESTÃO 08

O número de ouro, representado pela letra φ , é um número irracional, muito estudado por alguns matemáticos e considerado, por algumas pessoas, como o número que aparece nas coisas mais belas da natureza. Também chamado de razão áurea ou de proporção divina, seu valor pode ser encontrado calculando-se a raiz positiva da equação quadrática $x^2 - x - 1 = 0$. O valor de φ^6 , em função de φ , é:

- A) $\varphi + 2$
- B) $4\varphi + 2$
- C) $6\varphi + 6$
- D) $8\varphi + 5$
- E) $12\varphi + 23$

QUESTÃO 09

Em uma caixa, foram colocados 8 cartões de mesmo tamanho, peso e aspecto, cada um com uma letra ou número escrito, de modo que era possível escrever OMIF2020, se fossem colocados um cartão ao lado do outro, observando que a letra O é diferente do número 0 (zero). De uma única vez, quatro desses cartões são sorteados ao acaso. Desta forma, a probabilidade de serem sorteados os cartões com as letras da palavra OMIF, em qualquer ordem, é:

- A) $\frac{1}{70}$
- B) $\frac{1}{420}$
- C) $\frac{1}{1024}$
- D) $\frac{1}{1680}$
- E) $\frac{1}{4096}$

QUESTÃO 10

Um professor de matemática pensa em quatro números (a, b, c, d) e pergunta a sua aluna Pâmela qual é a média aritmética simples desses quatro números. Para isso, ele fornece apenas duas informações para ela:

- (1) $2a + 3b + 5c + 8d = 41$
- (2) $7a + 6b + 4c + d = 31$

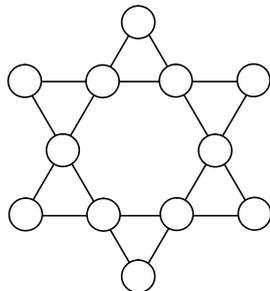
Sobre a suficiência destas informações para que Pâmela possa responder a pergunta sobre a média, podemos concluir que:

- A) A informação 1, sozinha, é o suficiente para responder a pergunta, mas a informação 2, sozinha, não é o suficiente.
- B) A informação 2, sozinha, é o suficiente para responder a pergunta, mas a informação 1, sozinha, não é o suficiente.
- C) As duas informações, juntas, são suficientes para responder a pergunta, mas nenhuma delas sozinha é o suficiente.
- D) Tanto a informação 1 quanto a informação 2 são, sozinhas, suficientes para responder a pergunta.
- E) A pergunta não pode ser respondida só com as duas informações fornecidas.

NÍVEL 3
(5 pontos para cada acerto)

QUESTÃO 11

A figura abaixo mostra uma estrela de 6 pontas com 12 círculos situados nas intersecções das retas que a formam. Note que, em cada segmento do desenho da estrela, há 4 círculos.



É possível escrever todos os números naturais de 1 a 12 nestes círculos de modo que as somas dos números nos 4 círculos de cada segmento sejam todas iguais. Qual é o valor dessas somas?

- A) 12
- B) 13
- C) 24
- D) 26**
- E) 39

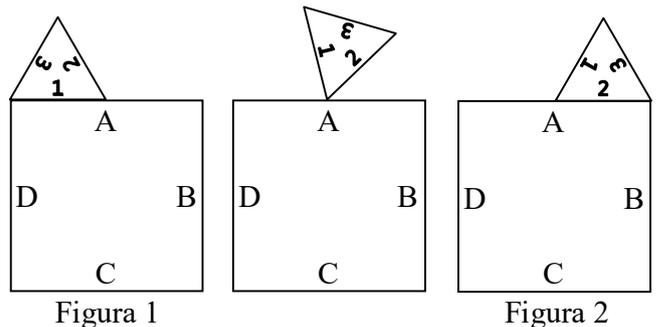
QUESTÃO 12

Em Três Corações/MG, foram construídas duas avenidas paralelas, descritas pelas equações $f(x) = x$ e $g(x) = x - 4$. Para interligar as duas avenidas, foi construída uma rua coplanar descrita pela curva $h(x) = x^2 - x - 3$. Os pontos de acesso (intersecções) da rua com as avenidas formam os vértices de um triângulo, em cuja área se planeja fazer uma praça. Qual é a área dessa praça?

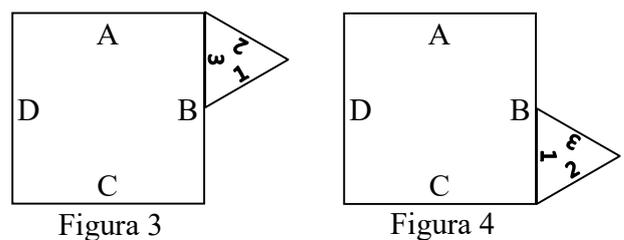
- A) 6
- B) 7
- C) 8**
- D) 9
- E) 10

QUESTÃO 13

As figuras abaixo mostram um triângulo equilátero de lado L girando ao redor de um quadrado fixo de lado $2L$. Os lados do triângulo estão nomeados de 1, 2 e 3, e os lados do quadrado estão nomeados de A, B, C e D. A Figura 1 representa a posição inicial do triângulo e a Figura 2 representa a nova posição do triângulo equilátero após finalizar o 1º giro.



Após o 2º giro, o lado do triângulo equilátero representado pelo número 3 estará em contato com o lado do quadrado representado pela letra B, formando, assim, a Figura 3. E após o 3º giro, o lado do triângulo equilátero representado pelo número 1 estará em contato com o lado do quadrado representado pela letra B, formando, assim, a Figura 4.



Se o triângulo equilátero continuar girando ao redor do quadrado fixo, os lados que estarão em contato entre o triângulo equilátero e o quadrado na Figura 2020 são, respectivamente:

- A) 1 e A
- B) 1 e B**
- C) 1 e C
- D) 2 e B
- E) 2 e C

**QUESTÃO 14**

A distribuição dos professores de Ciências Exatas de um Instituto Federal, segundo sua área de atuação e sua idade, está de acordo com o seguinte quadro:

	Matemática	Física	Química	Total
Até 40 anos	3	3	1	7
Mais de 40 anos	4	2	2	8
Total	7	5	3	15

Estes professores pretendem formar um grupo de estudos sobre o ensino de Ciências Exatas no Ensino Médio. Durante a organização do grupo, foram definidas três atividades principais, as quais deveriam, cada uma, ter um professor coordenador diferente. De quantas maneiras distintas podem-se escolher estes coordenadores, se o primeiro deve ter mais de 40 anos, o segundo deve ser professor de matemática e o terceiro não pode ser um professor de química?

- A) 672
- B) 534**
- C) 504
- D) 480
- E) 380

QUESTÃO 15

Um octógono não regular tem todos os seus ângulos internos de mesma medida e 7 dos seus lados medem, nessa ordem, $2\sqrt{2}$, 7, $3\sqrt{2}$, 3, $6\sqrt{2}$, 2 e $4\sqrt{2}$. Qual é o comprimento do oitavo lado?

- A) 2
- B) 3
- C) 4
- D) 5
- E) 6**